Ⅵ　液体 He^4 の素励起

京大・理　大見哲巨

（8月1日受理）

§ 1.　Landau Spectrum

1. 変分法

よく知られているようにFeynman[1]は様々な物理的考察の後，基底状態が与えられた時，励起状態の波動関数が次のようになることを導いた。

$$\rho_k \Phi_0 \qquad ; \qquad \rho_k = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_i e^{ikr_i}$$

ここで Φ_0 は $H\Phi_0 = E_0\Phi_0$ を満足する基底状態の波動関数である。

上の波動関数を用いてエネルギーの期待値を計算すると

$$\frac{<\Phi_0 \rho_k^+ H \rho_k \Phi_0>}{<\Phi_0 \rho_k^+ \rho_k \Phi_0>} = E_0 + \varepsilon_0(k)$$

$$\varepsilon_0(k) = \frac{k^2}{2mS(k)} \qquad S(k) : \text{structure function}$$

と有名な Feynman の spectrum が得られる。この spectrum の与える roton minimum のエネルギーは $\Delta_R = 19.1^\circ K$ と，例えば最近の実験値[2] $\Delta_R = 8.67 \pm 0.04^\circ K$ と比較すれば，二倍以上大きなものであった。このエネルギー差を小さくしようとして，Feynman - Cohen[3]は local current は保存するという考察から dipole type の back flow を取り入れる。この時波動関数は

$$\left\{ \rho_k + \sum_{k \neq q} 4\pi A \cdot \frac{\vec{k}\cdot\vec{q}}{q^2} \rho_q \rho_{k-q} \right\} \Phi_0$$

Aは変分パラメーターである。

この波動関数を用いると， roton minimum は $\Delta_R = 11.5^\circ K$ まで下げることができる。

2. 摂 動 法

次に摂動法によるLandau spectum の計算を見てみよう。まず第0近は Feynman の spectrum $\varepsilon_0(k)$ 波動関数 $\rho_k \Phi_0$ から出発する。したがって摂動のハミルトニアンは $\delta H = H - \varepsilon_0(k) - E_0$ である。

摂動の仕方として, Kuper によるRayleigh - Schrödinger 流のやり方と Jackson - Feenberg[4] によるBrillouin - Wigner の方法がある。Jackson - Feenbergによれば Landau spectrum $\varepsilon(k)$ は

$$\varepsilon(k) = \varepsilon_0(k) + \frac{1}{2} \sum_{\ell \neq 0, k} \frac{|\langle k-\ell, \ell \,|\, \delta H \,|\, k \rangle|^2}{\varepsilon_0(k) - \varepsilon_0(\ell) - \varepsilon_0(k-\ell)}$$

$$|k\rangle = \frac{1}{[S(k)]^{1/2}} \rho_k \Phi_0$$

$$|\ell, k-\ell\rangle = \frac{1}{[S(\ell) S(k-\ell)]^{1/2}} \rho_\ell \rho_{k-\ell} \Phi_0$$

の解として与えられる。ここで, $\langle k-\ell, \ell \,|\, \delta H \,|\, k \rangle$ を計算すると三体の分布関数が現われる。これを二体の分布関数により近似する方法に, Kirkwoud の Superposition 近似(KSA)とconvolution で近似する(CA)仕方がある。この二つの近似を用いて Spectrum を計算すると Spectrum 全体をみるかぎりどちらの近似がすぐれているともいえないが, $k \to 0$ の limit でちがいが出る。

$$\lim_{k \to 0} (\varepsilon(k) - \varepsilon_0(k)) \propto \begin{cases} k & (KSA) \\ k^3 & (CA) \end{cases}$$

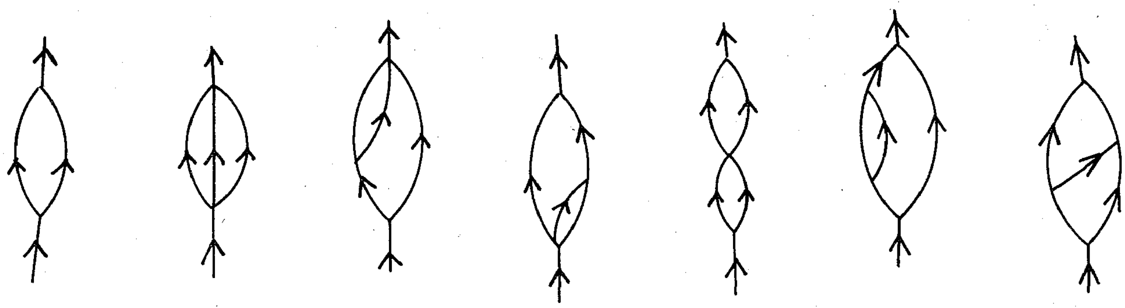
したがって摂動計算の場合はCA の方が consistent であると思われる。

3. そ の 後

その後, Nishiyama達[5] による固体電子論で成功したBohm - Pines の方法を He^4 に用いた計算と density fluctiation に対する canonical conjugate な variable を見付け出し, これらを用いてハミルトニアンを書き直していくという Sunakawa達[6] の計算がある。特に後者は摂動計算で, 実験と非常によくあう結果を出している。

§ 2. Phonon

最近 Phonon Spectrum すなわち $\varepsilon(k) = ck(1-\gamma k^2+\cdots)$ と書いた時の γ に対する議論が盛んである。少し前までは Spectrum の安定性の議論から $\gamma>0$ と思われていたが，超音波吸収，比熱等の実験を説明するために $\gamma<0$ でなければならないということが言われ出した。γ に対する理論計算で，完全な first principle から定量的に信用できる計算は，hard core の処理等困難がともなう。そこで，S(k)が与えられたとして出発する Feynman－Cohen，Jackson－Feenberg の計算の拡張が考えられる。Lai，Sim，Woo[7] により，$\varepsilon(k)=\varepsilon_0(k)(1+\gamma' k^2+\cdots)$ と書いた時の γ の計算が行われた。これは摂動の中間状態として，Jackson－Feenbeng の図 a) だけでなく，



(a) (b) (c) (d) (e) (f) (g)

(b)……(g)までとって行なわれた。

結果は $\varepsilon(k) = \varepsilon_0(k)\left(1-1.46\left(\frac{k}{mc}\right)^2+\cdots\right)$ と X ray による最近の S(k) の実験値[8]

$$S(k) = \frac{k}{2mc}\left(1-1.42\left(\frac{k}{mc}\right)^2+\cdots\right)$$

とをあわせると，Cowley－Woods[2]の中性子散乱の与える $\gamma = 0 \pm 2\times10^{36}\,\mathrm{cm}^{-2}\,\mathrm{g}^{-2}\,\mathrm{sec}^2$ と consistent である。

§ 3. Roton

"What is a roton" ということで Chester[9] が roton に対する見方を次の三つにまとめている。

a) Crystalline phonon

固体の phononのエネルギーが zone boundary で0になることのなごりが液体で残っているという見方である。実際，例えば neutron の実験で neutron が He^4 と相互作用をする短かい時間の範囲では，液体 He^4 が localには，固体のようにふるまうというのは自然であると思われる。この方向で最近 Takeno 達[10]の理論がある。

b) Small vortex ring

Landau の original ideaにあるように液体特有の渦の運動がSpectrumにあらわれると考えるのは魅力ある。また vortex ring から十分離れた所では，流れが dipole flow になるわけでこれもこの考え方に有利である。しかし，この idea を定式化するのは難しそうである。

c) dressed single particle

a)が固体からの近似とすれば，これは gas からの近似である。 Feynman Cohen の波動関数

$$\Psi = \left[\sum e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_i} \left(1 + \sum ig(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \right) \right] \Phi_0$$

でk が roton momentum と十分大きいことに注意すると Bose 統計の効果は小さいと考えられる。したがって，対称化の操作を落とした

$$\Psi \simeq e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_i} \left(1 + \sum ig(\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \right) \Phi_0$$

が十分よい波動関数とみなせる。実際この二つの波動関数を用いて，エネルギーを計算すると roton minimum のところでエネルギー差は10％程度である。

以上三つの見方をある程度統一的に取り入れたのが， Feynman 理論であると思われるが，その後この方向への進歩はあまりない。最近中性子散乱[11]による roton spectrum の圧力変化の測定がある。参考文献としてあげておく。

§4. Two branch

Cowley - Woods[2]の実験以後最近 two branch 議論が盛んである。 Soda達[12]の Sum - rule を使った議論があるが，その他の話しは結局第1近似としてある適当な準粒子をとり，次にこの準粒子が二個ある状態までを考えて，それらの間の相互作用の効果を取り入れていく，といった計算である。例えば， Iwamoto[13]の計算は第1近似の準粒子とそれらの間の相互作用を first princhple から求める。次に，相互作用を

separable と仮定してTamm－Dancoff近似をとる。相互作用の特徴的な性質を使えば，two branch の構造について，gross なことはきめることができる。一方Ruvalds，Zawadowski達[14]の論文では，第1近似の準粒子をFeynman－Cohenの準粒子とし，これと true roton との coupling を考える。Ruvalds達は，Green関数を用いた計算であるが，第1近似の準粒子のとり方とcoupling の強さを constant においていることをのぞけば，解くべき固有値方程式は，Iwamotoの場合とまったく同じである。この固有値方程式で注意すべきことは，Raman 散乱の実験で有名な$2\Delta_R$の下にあらわれるbind state が，第一近似の準粒子のエネルギーが，$2\Delta_R$に下から近づくにつれて，連続スペクトルの中に入ってしまうことである。Ruvalds達[15]は彼等の議論をさらに進めて，固体液体の相転移にあたるというinstability について論じている。

reference

1) R.P. Feynman ; Phys. Rev. **94** (1954) 21.
2) R.Cowley and A.D.B.Woods ; Can. J. Phys. **49** (1970) 177.
3) R.P.Feynman and M.Cohen ; Phys. Rev. **102** (1956) 1189.
4) H.W.Jackson and E.Feenberg ; Rev. Mod. Phys. **34** (1962) 686.
5) T. Nishiyama ; Progr. Theor. Phys. **38** (1967) 1062.
6) S.Sunakawa, S.Yamasaki and T.Kebukawa ; Progr. Theor. Phys. **41** (1969) 919.
7) H.W.Lai, H.K.Sim and C.W.Woo ; Phys. Rev. **A1** (1970) 1536.
8) R.B.Hallock ; Phys. Rev. **A5** (1972) 320.
9) V.G.Chester ; Lectures in Theoretical Phys. X 1-B (Gordon and Breach, 1968) P.253.
10) S.Takeno and M.Goda (to be published)
11) O.W.Dietrich, C.H.Graf, C.H.Huang and L.Passell ; Phys. Rev. **A5** (1972) 1377.
12) T.Soda, K.Sawada and T. Nagata ; Progr. Theor. Phys. **44** (1970) 860.
13) F.Iwamoto ; Progr. Theor. Phys. **44** (1970) 1121.
14) A.Zawadowski, J.Ruvalds and J.Solano ; Phys. Rev. **A5** (1972) 399.
15) V.Celli and J.Ruvalds ; Phys. Rev. Letters **28** (1972) 539.